NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

$f, g \in P[x]$ … $d \in P[x]$ NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL f, g, jestliže

1) d je normovaný
2) $d \mid f$ a $d \mid g$ — ozn. $d = D(f, g)$
3) $h \in P[x]$, $h \mid f$ a $h \mid g$, pak $h \mid d$

Tvrzení $f, g \in P[x]$. Pokud ex. jejich NSD, je jediný.

Tvrzení $f, g \in P[x]$, $g \neq 0$. Pak existují polynomy $q, r \in P[x]$ takové, že

1) $f = g \cdot q + r$
2) $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$.

Tvrzení $f, g \in P[x]$ nenulové polynomy. Pak existuje jejich NSD d a polynomy $u, v \in P[x]$ tak, že

$$d = f \cdot u + g \cdot v.$$

- Eukleidův algoritmus
- Rozšířený Eukleidův algoritmus

REDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní polynom, který je součinem dvou nekonstantních polynomů.
IREDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní, který není reducibilní.

Př.: $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$

$(x^2+1) = (x+i)(x-i)$

Tvrzení Buď $f \in P[x]$ normovaný polynom. Pak existují normované ireducibilní polynomy $g_1, \dots, g_n$ tak, že

$$f = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n .$$

KOŘENY A JEJICH NÁSOBNOST

Tvrzení Nechť $f \in P[x]$ a $\xi \in P$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1) ξ je kořen f
2) $(x-\xi) \mid f$.

Důkaz Nechť platí 1), tedy ξ je kořen f, $f(\xi)=0$.

$$f = (x-\xi)q + r, \quad r=0 \text{ nebo } \deg r < \deg(x-\xi).$$

Když $r=0$, pak $(x-\xi) \mid f$. ✓

Když $r \neq 0$, pak $\deg r < \deg(x-\xi) = 1 \Rightarrow \deg r = 0$.

$$0 = f(\xi) = (\xi-\xi)\cdot q(\xi) + r(\xi) = r. \text{ Spor.}$$

Nechť platí 2), tedy $(x-\xi) \mid f$ a existuje polynom q tak, že $(x-\xi)q = f$. Potom $f(\xi) = (\xi-\xi)q(\xi) = 0$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá ASPOŇ k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, když $(x-\xi)^k \mid f$.

Prvek $\xi \in P$ se nazývá k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, když $(x-\xi)^k \mid f$, ale neplatí $(x-\xi)^{k+1} \mid f$.

Základní věta algebry Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má aspoň jeden kořen.

Důsledek Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má rozklad na lineární ireducibilní činitele.

Mějme polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Polynom $f' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \in \mathbb{C}[x]$

se nazývá DERIVACE polynomu f.

Tvrzení 1) $(f+g)' = f' + g'$

2) $(fg)' = f'g + fg'$

3) $(f^k)' = k \cdot f^{k-1} \cdot f'$.

Tvrzení Buď $k \geq 2$, $f \in \mathbb{C}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ jeho k-násobný kořen.
Potom 1) ξ je $(k-1)$-násobný kořen polynomu f'.
2) ξ je $(k-1)$-násobný kořen $D(f, f')$.

Důkaz 1) $f = (x-\xi)^k \cdot h$

$$f' = k \cdot (x-\xi)^{k-1} \cdot h + (x-\xi)^k \cdot h'$$

2) ✓...

Tvrzení Buď $f \in \mathbb{C}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Potom ξ je 1-násobný kořen polynomu

$$\frac{f}{D(f, f')} \in \mathbb{C}[x].$$

Důsledek Buď $f \in \mathbb{C}[x]$.
1) Množina všech kořenů polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ je rovna množině všech kořenů polynomu f.
2) Všechny kořeny polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ jsou 1-násobné!

POLYNOMY S REÁLNÝMI KOEFICIENTY

Mějme polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Přiřadíme mu polynom

$$f^* = a_n^* x^n + \dots + a_1^* x + a_0^* \in \mathbb{C}[x].$$

Tvrzení Buď $f \in \mathbb{R}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Pak komplexně sdružené číslo ξ^* je další kořen stejné násobnosti.

Tvrzení Každý polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.